

Titre : étude de singularités en petite caractéristique

- Équipe : CFHP cfhp.univ-lille.fr. Directeur François Boulier.
- Directeur de thèse : François Boulier francois.boulier@univ-lille.fr.
- Co-encadrant : Adrien Poteaux adrien.poteaux@univ-lille.fr.
- Laboratoire : CRIStAL, Lille (France). Directeur Olivier Colot crystal.univ-lille.fr.

1 Résumé.

L'objectif de cette thèse sera de développer des algorithmes rapides pour l'étude locale de singularité de courbes algébriques planes en petite caractéristique (cadre dans lequel tous les calculs sont effectués modulo un petit nombre premier p). Cela commencera par une étude de la bibliographie correspondant à ce cas de petite caractéristique, avant d'essayer d'adapter des résultats récents pour développer des algorithmes rapides. Une extension éventuelle sera de réfléchir à une parallélisation du code obtenu pour de meilleures performances pratiques.

Ce sujet de thèse s'adresse autant à des étudiants venant d'un master de Mathématiques ou d'Informatique (le travail effectué pouvant s'adapter au profil de l'étudiant - plus théorique pour un mathématicien, plus orienté sur les implémentations pratiques pour un informaticien). Néanmoins, une aversion pour l'un des deux domaines serait problématique : le sujet est clairement à l'intersection des deux domaines.

Une application potentielle de ces travaux se situe dans le domaine des codes correcteurs d'erreur, où des questions sur le calcul de bases d'intégrales et d'espaces de Riemann-Roch apparaissent, et nécessitent des calculs sur les singularités.

2 Contexte.

L'étude de singularités (parfois décrites comme des « points infiniment proches ») de variétés algébriques et analytiques est un domaine de recherche ancien (l'étude de singularités de certaines courbes apparaît dans les problèmes étudiés par les géomètres grecs) et actif. C'est d'ailleurs devenu une discipline à part entière depuis les années 1960, à partir des travaux d'Hironaka, Zariski etc.

Des travaux récents [5, 6] ont permis d'obtenir des algorithmes rapides pour calculer les éléments essentiels d'une singularité. Néanmoins, ces résultats ne sont valables qu'en caractéristique 0 (au-dessus des rationnels) ou « suffisamment grande » (e.g. le premier p est plus grand que le degré du polynôme définissant la courbe considérée).

3 Travail à réaliser.

L'objectif de la thèse sera d'étudier le cas de la petite caractéristique. Dans ce contexte, l'utilisation de série de Puiseux ou de racines approchées (les « briques de base » des papiers [5, 6]) n'est pas toujours possible.

Une solution alternative consiste à calculer des développements d'Hamburger-Noether. L'objectif de cette thèse sera dans un premier temps de lire et de s'appropriier la littérature sur le cas particulier de corps de petite caractéristique (en particulier, les travaux de Russell [7])

semblent particulièrement pertinents), afin d'élaborer des algorithmes rapides pour calculer de tels développements. Une autre possibilité sera de se concentrer sur la factorisation locale de polynômes, dans la ligné des travaux de Montes et al [4, 1], ainsi que des valuations augmentées « à la MacLane » [3, 2, 8].

Bien entendu, une implémentation pratique des algorithmes développés est attendue. Elle pourra dans un premier temps être effectuée dans un langage de calcul formel (Maple ou SageMath), mais une implémentation dans un langage de plus bas niveau (par exemple en langage C) sera une sérieuse option, en fonction du profil du doctorant. Enfin, une extension éventuelle de ce travail consistera à paralléliser le code obtenu pour améliorer son efficacité pratique.

Références

- [1] J. Guàrdia, J. Montes, and E. Nart. Higher Newton polygons in the computation of discriminants and prime ideal decomposition in number fields. *J. Théor. Nombres Bordx.*, 23(3) :667–696, 2011.
- [2] S. Mac Lane. A construction for prime ideals as absolute values of an algebraic field. *Duke Math. J.*, 2(3) :492–510, 1936.
- [3] S. MacLane. A construction for absolute values in polynomial rings. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 40(3) :363–395, 1936.
- [4] J. Montes. *Polígonos de Newton de orden superior y aplicaciones aritméticas*. PhD thesis, Universitat de Barcelona, 1999.
- [5] A. Poteaux and M. Weimann. Computing puiseux series : a fast divide and conquer algorithm, 2017.
- [6] A. Poteaux and M. Weimann. A quasi-linear irreducibility test in $\mathbb{K}[[x]][y]$, 2019.
- [7] P. Russell. Hamburger-noether expansions and approximate roots of polynomials. *Manuscripta mathematica*, 31 :25–96, 1980.
- [8] J. Rùth. *Models of curves and valuations*. PhD thesis, Universität Ulm, 2014.

Mots clés : géométrie algébrique, singularités, calcul formel.

Compétences espérées : un goût pour les mathématiques (en particulier l'algèbre) et l'informatique.