Sujet de stage de M2 - CRIStAL - 2021

Calcul efficace des premiers termes d'une série de Puiseux.

— Équipe : CFHP `cfhp.univ-lille.fr`. Directeur François Boulier.
— Encadrant : Adrien Poteaux, `adrien.poteaux@univ-lille.fr`.
— Laboratoire : CRIStAL, Lille (France). Directeur Olivier Colot, `cristal.univ-lille.fr`.

Mots clés : géométrie algébrique, singularités, calcul formel, séries de Puiseux.

1 Résumé.

L'objectif de ce stage thèse sera de travailler sur le développement d'un algorithme rapide pour le calcul des n premiers termes d'une série de Puiseux d'un polynôme bivarié $F(x, y)$ (i.e. les séries $S(x)$ t.q. $F(x, S(x)) = 0$), quand n est de taille « modérée » (de l'ordre des degrés du polynôme par exemple). L'objectif est d'obtenir un algorithme ayant une complexité de l'ordre de $d\,n$.
L'idée pour ce stage est de se concentrer sur un sous problème qui permettrait de résoudre cela. Les dernières avancées effectuées dans l'article [4] (cf la section suivante pour plus de détails sur ce point) permettent de trouver certains termes de ces séries (ceux les plus importants d'un point de vue mathématique), mais pas tous, pourtant nécessaires à de nombreuseus applications. L'idée est de « lire » ces coefficients sur les *racines approchées* calculées par l'algorithme [4]. Concrètement, voici quelques exemples de problèmes rencontrés (en particulier, il n'est pas obligé de maîtriser les aspects liés aux singularités pour traiter ces questions) :

1. On connaît $P^2 \in \mathbb{K}[x]$, on cherche P (problème simple),
2. On connaît $A = P^3 + x\,Q^3$ ainsi que $B = P\,Q$, et l'on cherche P et Q (P est par exemple solution de l'équation $P^6 - B\,P^3 + x\,A = 0$, ce qui permet de résoudre rapidement cette question).
3. On connaît $A = P_2^2 + 2\,P_1\,P_3$, $B = P_1^2\,P_2 + x\,P_2\,P_3^2$ et $C = P_1^4 - x\,P_2^4 - 2\,xP_1\,P_2^2\,P_3 + x^2\,P_3^4$, et l'on cherche P_1, P_2 et P_3 (on peut montrer que P_2 est solution de l'équation $4\,x\,P_2^6 - 4\,x\,A\,P_2^4 + (C + x\,A^2)\,P_2^2 - B^2 = 0$).
4. etc (les problèmes suivants augmentent en taille, et ne sont pas encore résolus).

Un premier objectif pour ce stage sera de résoudre des problèmes similaires (de taille un peu plus grande). Un objectif plus ambitieux sera de trouver une méthode permettant de résoudre cela en toute généralité.
Ces questions pourront générer une continuation en thèse, autour notamment d'une implémentation efficace de ces algorithmes (en prenant par exemple en compte les aspects parallèles).

2 Contexte.

L'étude de singularités (parfois décrites comme des « points infiniment proches ») de variétés algébriques et analytiques est un domaine de recherche ancien (l'étude de singularités de certaines courbes apparaît dans les problèmes étudiés pas les géomètres grecs) et actif. C'est d'ailleurs devenu une discipline à part entière depuis les années 1960, à partir des travaux d'Hironaka, Zariski etc.

Différents algorithmes ont été développés pour étudier des singularités. En particulier, le moyen le plus utilisé pour « résoudre » une singularité est de passer d'une courbe algébrique à une autre par des changements de variables bien choisis, afin d'obtenir au final une courbe non singulière. Ces méthodes peuvent se résumer par le calcul des *séries de Puiseux*, dont les premiers termes contiennent les éléments de cette résolution (que l'on appelle la partie singulière ; le nombre minimum de termes pour « séparer » les séries l'une de l'autre).
L'article [3] a grandement avancé cette thématique : il permet de factoriser localement le polynôme F en la complexité escomptée, permettant de se concentrer sur le cas localement irréductible (plus simple à traiter). Néanmoins, cet article, basé sur l'algorithme de Newton-Puiseux, inclut des « éclatements » (changements de variables du type $x \leftarrow x^q$) qui ne permettent pas d'obtenir une complexité meilleure que $d^2\,n$ (suffisant néanmoins pour ce qui est développé dans [3], mais ne permettant pas d'avoir une complexité meilleure que d^3 pour tester l'irréductibilité locale de F). Pour contourner ce problème d'éclatement, un test d'irréductiblité en d^2 (soit la taille d'entrée du polynôme) a été récemment développé dans [4], basé sur les *racines approchées* d'Abhyankhar [1]. Cet algorithme permet en particulier de calculer les *éléments essentiels* des séries de Puiseux, mais pas l'ensemble des coefficients de cette série, pourtant nécessaire à de nombreuses applications.
Ces dernières sont multiples : calcul du genre d'une courbe via la formule d'Hurwitz, de bases intégrales d'un corps de fonction [5], d'une base pour l'espace de Riemann-Roch $\mathcal{L}(D)$ associé à un diviseur D (via l'algorithme de Dedekind-Weber's [2]), etc.

Compétences souhaitées : un goût pour les mathématiques (en particulier l'algèbre) et l'informatique.

Références

[1] S. S. Abhyankar. Irreducibility criterion for germs of analytic functions of two complex variables. *Advances in Mathematics*, 74(2) :190 – 257, 1989.

[2] D. Duval. Diverses questions relatives au calcul formel avec des nombres algebriques, 1987. Thèse d'État.

[3] A. Poteaux and M. Weimann. Computing puiseux series : a fast divide and conquer algorithm, 2017.

[4] A. Poteaux and M. Weimann. A quasi-linear irreducibility test in $\mathbb{K}[[x]][y]$, 2019.

[5] M. van Hoeij. An Algorithm for Computing an Integral Basis in an Algebraic Function Field. *Journal of Symbolic Computation*, 18 :353–363, 1994.