

Titre : élimination intégrro-différentielle

- Équipe : CFHP `cfhp.univ-lille.fr`. Directeur François Boulier.
- Encadrant : François Lemaire `francois.lemaire@univ-lille.fr`
- Laboratoire : CRISAL, Lille (France). Directeur Olivier Colot `crystal.univ-lille.fr`

1 Contexte

L'équipe CFHP du laboratoire CRISAL (Université de Lille) est spécialisée dans le traitement de systèmes d'équations différentielles aux dérivées partielles (EDP) polynomiales. Depuis peu, l'équipe étudie le traitement des équations intégrro-différentielles, c'est-à-dire des équations faisant intervenir à la fois des dérivations et des opérateurs d'intégration. Il s'agit d'un domaine peu étudié d'un point de vue algébrique et algorithmique, et qui a des applications concrètes en modélisation.

2 Travail à réaliser

Dans le cadre du stage, les équations seront supposées intégrales (c'est-à-dire sans dérivations) pour limiter la difficulté du sujet. Le stagiaire commencera par étudier les deux problèmes suivants (sections 2.1 et 2.2) d'un point de vue algébrique et algorithmique. Le stagiaire développera ensuite un prototype d'algorithme (section 2.3). Il s'agit d'un stage ambitieux sur un sujet de recherche nouveau. Le travail sera réalisé avec le logiciel Maple. Le stagiaire bénéficiera du travail récent réalisé par Louis Roussel (lors d'un stage réalisé dans l'équipe), qui a proposé une ébauche d'algorithme.

2.1 L'idéal engendré par $u - \int u$ ne contient pas u

Par une construction non détaillée dans ce document, on peut définir l'idéal I engendré par l'équation $u - \int u$. Cette équation qui peut s'interpréter comme $u(t) = \int_0^t u(x)dx$ admet pour seule solution analytique $u(t) = 0$. Étrangement, l'équation u n'appartient pas ni à l'idéal I . Une preuve partielle de ce résultat basé sur des arguments d'analyse est donnée dans [1].

Le stagiaire étudiera la possibilité d'une preuve basée sur des techniques algébriques, par exemple en interprétant l'équation $u - \int u$ comme la règle de réécriture $\int u \rightarrow u$.

2.2 Un problème d'identifiabilité

Le système différentiel suivant porte sur les fonctions $x = x(t)$ et $y = y(t)$ ainsi qu'un paramètre α supposé constant :

$$\dot{x} = \alpha x, \tag{1}$$

$$\dot{y} = xy. \tag{2}$$

En exprimant x grâce à (2) et en reportant dans (1), on obtient une équation différentielle en y :

$$y\ddot{y} - \dot{y}^2 - \alpha y\dot{y} = 0.$$

On dit alors qu'on a éliminé la variable x . Cette équation permet en théorie de retrouver α à partir de $y(t)$ uniquement. On dit alors que le système est identifiable. On peut montrer qu'il n'existe pas d'équation polynomiale faisant intervenir α , y et uniquement des intégrales itérées, qui soit conséquence de (1) et (2) (il en existe toutefois une si on s'autorise la fonction \ln). Un objectif pour le stagiaire serait d'écrire une preuve plus algorithmique, basée sur des techniques de réécriture.

2.3 Prototype d'algorithme d'élimination

Pour l'essentiel du stage, le stagiaire développera un prototype d'algorithme d'élimination. Comme aucun prototype n'existe, le stage est essentiellement un stage de recherche. Pour limiter la difficulté, le stagiaire tentera d'identifier des classes réduites de systèmes sur lesquels l'élimination est possible.

Références

- [1] François Boulier, François Lemaire, Markus Rosenkranz, Rosane Ushirobira, and Nathalie Verdière. On Symbolic Approaches to Integro-Differential Equations. In Niculescu Silviu-Iulian and Ditzinger Thomas, editors, *Algebraic and Symbolic Computation Methods in Dynamical Systems*, Advances in Delays and Dynamics. Springer, 2017.

Mots clé

Algèbre différentielle, théorie de l'élimination, intégration.

Compétences espérées

Un goût pour les mathématiques (en particulier l'algèbre) et l'informatique.